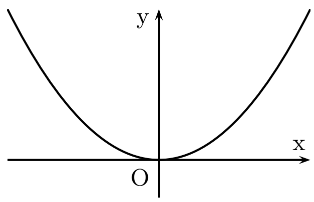
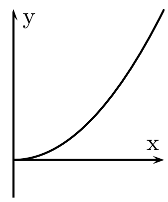
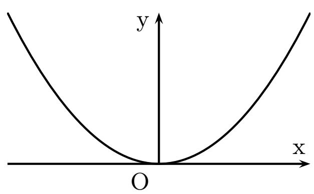
4.1 Si on considère le procédé de calcul "prendre le carré du nombre", on obtient les différentes applications suivantes :



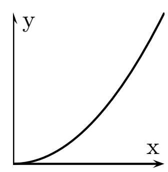
$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$f_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$



$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$



$f_4 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

Vérifier que : f_1 n'est ni injective ni surjective, f_2 est injective mais pas surjective, f_3 est surjective mais pas injective et f_4 est bijective.

4.2 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos(x)$.

1. Donner le domaine de définition de f et la périodicité de f.
2. Dessiner le graphe de f.
3. f est-elle injective ? Surjective ?
4. Peut-on définir la fonction réciproque $\arccos = f^{-1}$? Si oui, représenter son graphe.

4.3 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$.

1. Donner le domaine de définition de f et la périodicité de f.
2. Dessiner le graphe de f.
3. f est-elle injective ? Surjective ?
4. Peut-on définir la fonction réciproque $\arcsin = f^{-1}$? Si oui, représenter son graphe.

4.4 On considère la fonction $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Donner le domaine de définition de f
2. Dessiner le graphe de f.
3. f est-elle injective ? Surjective ?
4. Peut-on définir une fonction réciproque ? Si oui, représenter son graphe.

4.5 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Dessiner le graphe de f.
3. f est-elle injective ? Surjective ?
4. Peut-on définir la fonction réciproque ? Si oui, représenter son graphe.

4.6 Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

4.7 Soit l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f \colon x \mapsto x^2$.

1. Déterminer les ensembles suivants : $f([-3,-1])$, $f([-2,1])$, $f([-3,-1]\cup[-2,1])$ et $f([-3,-1]\cap[-2,1])$. Les comparer.
2. Mêmes questions avec les ensembles $f^{-1}(]-\infty,2])$, $f^{-1}([1,+\infty[)$, $f^{-1}(]-\infty,2]\cup[1,+\infty[)$ et $f^{-1}(]-\infty,2]\cap[1,+\infty[)$.

4.8 Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?
$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}, n\mapsto 2n$; $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}, n\mapsto -n$
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto x^2$; $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+, x\mapsto x^2$
$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, z\mapsto z^2$.

4.9 Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ telle que
$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\in[0,1]\cap\mathbb{Q},\\ 1-x & \text{sinon.}\end{cases}$$
Démontrer que $f\circ f=id$.

4.10 Soient E, F et G des ensembles et les applications $f:E\to F$, $g:F\to G$ et $h=g\circ f$. Montrer que :

1. si h est injective, alors f est injective ;
2. si h est surjective, alors g est surjective ;
3. si h est surjective et g est injective alors f est surjective ;
4. si h est injective et f est surjective alors g est injective.

4.11 Soit A un ensemble non vide. Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? Lorsque cela est possible, en donner les inverses ?

b.
$$\begin{array}{rccc} f: & A & \to & A\times A\\ & a & \mapsto & (a,a)\end{array}$$
(discuter selon le cardinal de A)

c.
$$\begin{array}{rccc} f: & A & \to & A\times\{e\}\\ & a & \mapsto & (a,e)\end{array}$$

d.
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z}\\ & n & \mapsto & \begin{cases} -\frac{n}{2} \text{ si 2 divise n}\\ \frac{n+1}{2} \text{ sinon}\end{cases}\end{array}$$

e.
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^*\\ & x & \mapsto & \frac{1}{x}\end{array}$$

f.
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+\\ & x & \mapsto & \frac{x}{x+1}\end{array}$$

g. Soient a, b, c et d des réels tels que $ac\neq 0$ et $ad-bc\neq 0$,
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}\setminus\{-\frac{d}{c}\} & \to & \mathbb{R}\setminus\{\frac{a}{c}\}\\ & x & \mapsto & \frac{ax+b}{cx+d}\end{array}$$

4.12 Soient E et F deux ensembles de cardinal finis et $f:E\to F$ une application. Montrer que

1. f injective $\Rightarrow Card(E)\leq Card(F)$.
2. f surjective $\Rightarrow Card(E)\geq Card(F)$.

4.13 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=2x/(1+x^2)$.

1. f est-elle injective ? surjective ?

2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
3. Montrer que la restriction $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$ $g(x) = f(x)$ est une bijection.

4.14 On considère les fonctions suivantes

$$\begin{array}{llll} \Phi_{pol} : & \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (r, \theta) & \longmapsto & (x, y) \\ & & & x = \rho \cos\theta\,,\ y = \rho \sin\theta\ . \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \Phi_{cyl} : & \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (\rho, \theta, z) & \longmapsto & (x, y, z) \\ & & & x = \rho \cos\theta\,,\ y = \rho \sin\theta\ . \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \Phi_{sph} : & \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (r, \theta, \phi) & \longmapsto & (x, y, z) \\ & & & x = r \sin\theta \cos\phi\,,\ y = r \sin\theta \sin\phi\,,\ z = r \cos\theta\ . \end{array}$$

1. Calculer
$$E_1 = \Phi_{pol}(\{(r, 0), r \in [2, 3]\}) \qquad E_2 = \Phi_{pol}(\{(r, 0), r \in \mathbb{R}^+\})$$
$$E_3 = \Phi_{pol}(\{(1, 0)\}) \qquad E_4 = \Phi_{pol}(\{(R, \theta), \theta \in [0, 2\pi[\})$$
2. Calculer
$$F_1 = \Phi_{cyl}(\{(r, 0), r \in [2, 3]\}) \qquad F_2 = \Phi_{cyl}(\{(R, \theta), \theta \in [0, 2\pi[\})$$
3. Calculer
$$G_1 = \Phi_{sph}(\{(r, 0), r \in [2, 3] \theta \in [0, 2\pi[\}) \qquad G_2 = \Phi_{sph}(\{(R, \theta), \theta \in [0, 2\pi[\})$$

4.15 Soit f une application vérifiant $f = f \circ f \circ f$. Montrez que :

f est injective si et seulement si f est surjective.