Licence 1ère année - Math 116 **Année** 2013 2014

TD de Mathématiques Fiche n° 3.

Géométrie dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Espaces vectoriels

3.1

1. Décrire les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.
2. Décrire les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

3.2 Soit $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1. Vérifier que $F_1 = \{(x_1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
2. Vérifier que $F_2 = \{(0, x_2) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
3. Que représente géométriquement dans le plan l'ensemble $F_1 \cup F_2$? A-t-il une structure de sous-espace vectoirel de $\mathbb{R}^2$?
4. On définit la somme $F_1 + F_2$ comme le sous-ensemble composé des vecteurs $u_1 + u_2$, avec $u_1 \in F_1$, $u_2 \in F_2$. Montrer que $F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Que représente-t-il géométriquement dans le plan ?
5. Que représente géométriquement dans le plan $\mathbb{R}^2$ l'ensemble $F_1 \cap F_2$? A-t-il une structure de sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?

3.3 Déterminer parmi les ensembles suivant lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ (muni de sa structure canonique d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$).

$$E_1 = \{(0,0)\}, \quad E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\},$$

$$E_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0\} \quad \text{et} \quad E_4 = \{(\alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Géométrie

3.4 Dans $\mathbb{R}^2$, on considère une droite $\mathcal{D}$ d'équation

$$5x - 3y = 2$$

et un point A de coordonnées $(1, 6)$. Quelle est la distance de A à la droite $\mathcal{D}$?

3.5 Dans $\mathbb{R}^2$, on considère deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ d'équations respectives :

$$ax + by = d \quad \text{et} \quad cx + dy = e.$$

1. Quelle équation vérifie les coordonnées d'un point M équidistant de ces deux droites ?
2. En déduire que l'ensemble des points équidistants de ces deux droites est la réunion de deux droites Δ_1 et Δ_2 dont on donnera une équation implicite.
3. Montrer que Δ_1 et Δ_2 sont orthogonales.

3.6 Donner les équations paramétriques et implicites

— De la droite D_1 passant par $A = (1, 2)$ et de vecteur directeur $(2, 3)$.
— De la droite D_2 passant par $A = (0, 1)$ et de vecteur directeur $(1, 4)$.
— De la droite D_3 passant par $A = (1, 3)$ et de vecteur directeur $(2, 6)$.

Est-ce que ces droites sont des droites affines, des droites vectorielles ?

3.7 Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les deux droites $\mathcal{D}_1$ d'équation $\mathcal{D}_2$ d'équations respectives :

$$2x + y = 2 \quad \text{et} \quad x + 3y = 11$$

1. Les deux droites sont-elles parallèles ?
2. Donner des équations paramétriques de ces droites.
3. Donner une équation paramétrique et implicite de la droite perpendiculaire à $\mathcal{D}_1$ et passant par le point A de coordonnées $(2, 1)$.

3.8 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs de coordonnées :

$$\vec{u} : (1, 3, 5) \quad \vec{v} : (2, 3, 5) \quad \vec{w} : (1, 2, 3).$$

1. Calculer l'aire du parallélogramme engendré par les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. Calculer le déterminant de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
3. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme-t-elle une base ? Si oui, cette base est-elle directe ?

3.9 Calculer les déterminants suivants.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 13 \\ 0 & -1 & -16 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} D_5 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

3.10 On considère 3 points A, B et C non alignés dans $\mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ les droites affines passant respectivement par (B, C), (A, C) et (A, B).

1. Montrer que $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère du plan.
2. Donner les équations des droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ dans ce repère.
3. Donner les équations des trois médianes dans ce repère.
4. Donner les coordonnées de l'isobarycentre de A, B et C dans ce repère et vérifier qu'il est le point d'intersection des trois médianes.

3.11 Montrer la formule de Cauchy-Schwarz : pour tout vecteur u et v d'un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $< ., . >$, on a :

$$| < u, v > | \leq \|u\| \, \|v\|$$

De plus

$$| < u, v > | = \|u\| \, \|v\| \quad \Leftrightarrow \quad u \text{ et } v \text{ sont colinéaires.}$$

(Indication : on pourra développer $< u + \lambda v, u + \lambda v >$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.)