Licence 1ère **année - Math 116** **Année** 2013 2014

TD de Mathématiques Fiche n° 2.

Nombres complexes

2.1 Mettre sous forme algébrique $x + iy$ les nombres complexes suivants :

$$z_1 = (1+i)^4; \qquad z_2 = \frac{1+i}{1-i}; \qquad z_3 = (1+2i)(1+i) - \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}; \qquad z_4 = \frac{a+i}{1-ai}, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$z_5 = (\frac{1+i}{1-i})^{1997} - (\frac{1-i}{1+i})^{1997}; \qquad z_6 = \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\alpha - i\sin\alpha}, \quad (\varphi \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}^*)$$

2.2 Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe :

$$\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}.$$

2.3 Déterminer le module et un argument du nombre complexe :

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}.$$

2.4 Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$. Montrer que $\frac{1+z}{1-z}$ est un imaginaire pur si et seulement si $|z| = 1$.

2.5 Trouver le module et l'argument des nombres complexes suivants :

$$z_1 = (1-i)^{1997}; \qquad z_2 = 1 + e^{i\theta}; \qquad z_3 = 1 - i; \qquad z_4 = 1 + i\sqrt{3}.$$

En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

2.6 A l'aide de $(1+i)^n$, calculer :

$$S_1 = C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + ... \qquad S_2 = C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + ...$$

2.7 On considère les deux nombres complexes suivants : $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

1. Écrire z_1 et z_2 sous forme algébrique.
2. Déterminer les écritures sous formes algébriques et exponentielles de $z_1 z_2$.
3. En déduire la valeur exacte de $\sin\dfrac{\pi}{12}$ et $\cos\dfrac{\pi}{12}$.

2.8 Pour quels entiers n parmi : 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007 le nombre complexe

$$(1+i)^n$$

est-il imaginaire pur ?

2.9 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}\right)^n = \frac{1+i\tan(n\alpha)}{1-i\tan(n\alpha)}.$$

2.10 Soit $z \in \mathbb{C}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k$ et en déduire :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos kx; \qquad \sum_{k=0}^{n} \sin kx; \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cos kx.$$

2.11 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin(\frac{n\pi}{4}))$.

2.12 Montrer que :
a) $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$;
b) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$;
c) $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.

2.13

1. Linéariser $\cos^3 x$, $\sin^4 x$ et $\sin^3 x \cos^4 x$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} 2\sin^3 x \cos^4 x$.

2.14 Calculer $\left(\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}\right)^n$ en fonction de n.

2.15 Soit $z = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.
a) Calculer $1 + z + z^2 + z^3 + z^4$;
b) en déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{5}$ et de $\sin\frac{\pi}{5}$.

2.16 Soit $z = \frac{3}{\sqrt{3}+i}$. Calculer z^4.

2.17 On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Trouver les racines troisièmes de l'unité et les exprimer en fonction de j.
2. Les représenter sur le cercle trigonométrique.
3. Montrer que la somme des racines troisièmes de 1 vaut 0.
4. Trouver les racines troisièmes de $-8i$.
5. Résoudre $z^n + 1 = 0$.

Racine carré, équation

2.18 Résoudre de deux façons différentes :

$$z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

et en déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$.

2.19 Déterminer les racines deuxièmes des nombres complexes suivants :

$$a)\ 8-6i \quad b)\ -3+4i \quad c)\ 7+24i \quad d)\ 9+40i \quad e)\ 1+i.$$

2.20 Résoudre :
a) $iz^2 + (1-5i)z + 6i - 2 = 0$;
b) $z^2 - (3+4i)z + 7i - 1 = 0$;
c) $2z^2 + (5+i)z + 2 + 2i = 0$;
d) $z^2 - (3+2i)z + 5 + 5i = 0$;
e) $z^2 - 2\bar{z} = 0$.

Géométrie complexe

2.21 Montrer que pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, nous avons :

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2.$$

Donner une interprétation géométrique.

2.22 Déterminer et représenter l'ensemble des nombres complexes z tels que :

a) $|1-z| \leq \frac{1}{2}$;
b) $|(1-i)z-3i| = 3$;
c) $\mathcal{R}e(1-z) \leq 2$;
d) $\mathcal{R}e(iz) \geq 1$;
e) $|1-\frac{1}{z}|^2 = 2$;
f) z^7 et $\frac{1}{z^2}$ soient conjugués ;
g) $\frac{|z-3|}{|z+3|} > 2$;
h) $\frac{|z-3|}{|z-5|} < 1$.