Licence 1ère année - Math 116 **Année** 2013 2014

TD de Mathématiques Fiche n° 1.

Calculs dans $\mathbb{R}$

1.1 Développer $(x-1)^3$, $(x+3z)^5$.

1.2

1. Quelle est la somme des nombres entre 1 et 50 ?
2. Quelle est la somme des nombres entre 30 et 90 ?

1.3 Calculer les sommes suivantes

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) \quad \text{b) } \sum_{k=0}^{n} 1 \quad \text{c) } \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}$$
$$\text{d) } \sum_{k=2}^{n+1} \ln\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{e) } \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \quad \text{f) } \sum_{k=2}^{n} 2^{2k+1}$$

1.4 Calculer les produits suivants

$$\text{a) } \prod_{k=1}^{n} 2 \quad \text{b) } \prod_{k=1}^{n} (2k) \quad \text{c) } \prod_{k=1}^{n} (2k+1)$$
$$\text{d) } \prod_{k=1}^{n} \cos(k\pi) \quad \text{e) } \prod_{k=1}^{n} e^k \quad \text{f) } \prod_{k=2}^{n-1} \left(1-\frac{1}{k}\right)$$

1.5 Montrer les relations suivantes par récurrence :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{[n(n+1)]^2}{4}.$$

En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k+1)(k+2)$.

1.6

1. Montrer que pour tout $k \geq 2$, on a $\dfrac{2}{k(k^2-1)} = \dfrac{1}{k+1} - \dfrac{2}{k} + \dfrac{1}{k-1}$.
2. En déduire $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k(k^2-1)}$.

1.7 En utilisant la formule du binôme, démontrer que :

1. $2^n + 1$ est divisible par 3 si et seulement si n est impair ;
   (Indication : on pourra développer $(3-1)^n$*).*
2. $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$ est divisible par 7.

1.8 Démontrer que $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$ pour $1 \leq p \leq n-1$.

1.9 Démontrer que $C_n^k C_{n-k}^{p-k} = C_p^k C_n^p$ (pour $0 \leq k \leq p \leq n$). En déduire que

$$\sum_{k=0}^{p} C_n^k C_{n-k}^{p-k} = 2^p C_n^p.$$

1.10 Montrer que, pour p et n entiers naturels non nuls tels que $1 \leq p \leq n$, on a :

$$pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}.$$

En déduire pour tout $n \geq 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} k\ C_n^k = n2^{n-1}.$$

1.11 Calculer la somme ci-dessous :

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij.$$

1.12

1. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k$$

2. En utilisant la fonction $x \mapsto (1+x)^n$, calculer :

$$\sum_{k=1}^{n} kC_n^k \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k.$$